1 Droites dans le plan

1.1 Repérage dans le plan

Définition 1. *Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, tout point M est repéré par ses coordonnées $(x; y)$ telles que :*

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

1.2 Équation cartésienne d'une droite

Définition 2. *Dans le plan muni d'un repère, toute droite (d) admet une **équation cartésienne** de la forme :*

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Remarque 1.
- *Un point $M(x_0; y_0)$ appartient à la droite (d) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation : $ax_0 + by_0 + c = 0$*
- *L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique (on peut la multiplier par un réel non nul)*

Exemple 1. *1) La droite (d) d'équation $2x - 3y + 1 = 0$*
Le point $A(1; 1)$ appartient-il à (d) ?
$2 \times 1 - 3 \times 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$ *: Oui, $A \in (d)$*
Le point $B(0; 2)$ appartient-il à (d) ?
$2 \times 0 - 3 \times 2 + 1 = -5 \neq 0$ *: Non, $B \notin (d)$*
2) Les équations $x - 2y + 3 = 0$ et $2x - 4y + 6 = 0$ représentent la même droite.

1.3 Vecteur directeur d'une droite

Définition 3. *Un **vecteur directeur** d'une droite (d) est un vecteur non nul $\vec{u}$ parallèle à cette droite.*

Si (d) a pour équation $ax + by + c = 0$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Remarque 2. *Il existe une infinité de vecteurs directeurs pour une droite donnée (tous colinéaires entre eux).*

Exemple 2. *Pour la droite $(d) : 2x - 3y + 1 = 0$*

Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ (on inverse a et b et on change le signe de l'un)

D'autres vecteurs directeurs : $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, etc.

1.4 Vecteur normal à une droite

Définition 4. *Un **vecteur normal** à une droite (d) est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal (perpendiculaire) à cette droite.*

Si (d) a pour équation $ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

Exemple 3. *Pour la droite $(d) : 2x - 3y + 1 = 0$*

Un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

D'autres vecteurs normaux : $\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, etc.

1.5 Équation réduite d'une droite

Définition 5. *Une droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées admet une **équation réduite** de la forme :*

$$y = mx + p$$

où :

- *m est le **coefficient directeur** (ou pente) de la droite*
- *p est l'**ordonnée à l'origine** (ordonnée du point d'intersection avec l'axe des ordonnées)*

Remarque 3.
- *Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = k$ (pas d'équation réduite)*
- *Une droite parallèle à l'axe des abscisses a pour équation $y = p$ (coefficient directeur $m = 0$)*

Exemple 4. ***1)*** *La droite (d) : $y = 2x - 3$ a pour coefficient directeur $m = 2$ et pour ordonnée à l'origine $p = -3$.*

2) *Passer de l'équation cartésienne à l'équation réduite :*

$2x - 3y + 1 = 0$

$-3y = -2x - 1$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Coefficient directeur : $m = \frac{2}{3}$, ordonnée à l'origine : $p = \frac{1}{3}$

1.6 Coefficient directeur et vecteur directeur

Propriété 1. *Si une droite admet pour équation réduite $y = mx + p$, alors :*

- *$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur*
- *Le coefficient directeur est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ pour deux points A et B de la droite (avec $x_A \neq x_B$)*

1.7 Droites particulières

Type de droite	**Équation**	**Remarques**
Axe des abscisses	$y = 0$	Coefficient directeur $m = 0$
Axe des ordonnées	$x = 0$	Pas d'équation réduite
Parallèle à (Ox)	$y = p$	Coefficient directeur $m = 0$
Parallèle à (Oy)	$x = k$	Pas d'équation réduite
Passant par l'origine	$y = mx$	Ordonnée à l'origine $p = 0$
Première bissectrice	$y = x$	$m = 1$, $p = 0$

1.8 Déterminer l'équation d'une droite

Méthode 1 (Droite passant par deux points). *Pour déterminer l'équation de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:*

1. *Calculer le coefficient directeur :* $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
2. *Utiliser l'équation réduite :* $y = mx + p$
3. *Remplacer par les coordonnées de A (ou B) pour trouver p*
4. *Écrire l'équation finale*

Exemple 5. *Déterminer l'équation de la droite passant par $A(1; 2)$ et $B(3; 8)$.*
Étape 1 : $m = \dfrac{8-2}{3-1} = \dfrac{6}{2} = 3$
Étape 2 : $y = 3x + p$
Étape 3 : *Avec le point $A(1; 2)$: $2 = 3 \times 1 + p$, donc $p = -1$*
Étape 4 : *L'équation de la droite est $y = 3x - 1$ ou $3x - y - 1 = 0$*

1.9 Droites parallèles et perpendiculaires

Propriété 2 (Droites parallèles). *Deux droites (d_1) et (d_2) sont **parallèles** si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.*
Si $(d_1) : y = m_1x + p_1$ et $(d_2) : y = m_2x + p_2$, alors :

$$(d_1) \parallel (d_2) \iff m_1 = m_2$$

Propriété 3 (Droites perpendiculaires). *Deux droites (d_1) et (d_2) non parallèles aux axes sont **perpendiculaires** si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1.*
Si $(d_1) : y = m_1x + p_1$ et $(d_2) : y = m_2x + p_2$, alors :

$$(d_1) \perp (d_2) \iff m_1 \times m_2 = -1 \iff m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Exemple 6. ***1)*** *La droite $(d_1) : y = 2x + 3$ est parallèle à $(d_2) : y = 2x - 5$ car $m_1 = m_2 = 2$.*
2) *La droite $(d_1) : y = 3x + 1$ est perpendiculaire à $(d_2) : y = -\frac{1}{3}x + 2$ car $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.*
3) *Déterminer l'équation de la droite passant par $A(2; 1)$ et perpendiculaire à $(d) : y = 2x - 3$.*
Coefficient directeur de (d) : $m = 2$
Coefficient directeur de la perpendiculaire : $m' = -\dfrac{1}{2}$
Équation : $y = -\dfrac{1}{2}x + p$
Passage par $A(2; 1)$: $1 = -\dfrac{1}{2} \times 2 + p$, donc $p = 2$
Équation : $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ ou $x + 2y - 4 = 0$

2 Droites dans l'espace

2.1 Repérage dans l'espace

Définition 6. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout point M est repéré par ses coordonnées $(x; y; z)$ telles que :*

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

2.2 Représentation paramétrique d'une droite

Définition 7. *Dans l'espace, une droite (d) passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une **représentation paramétrique** :*

$$(d) : \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

où t est le paramètre.

Remarque 4.
- *Chaque valeur de t correspond à un point de la droite*
- *$t = 0$ donne le point A*
- *La représentation paramétrique n'est pas unique (dépend du point et du vecteur directeur choisis)*

Exemple 7. ***1)*** *La droite (d) passant par $A(1; 2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique :*

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2) *Le point $B(5; 0; 5)$ appartient-il à (d) ?*
Il faut trouver t tel que :

$$\begin{aligned} 5 = 1 + 2t &\Rightarrow t = 2 \\ 0 = 2 - t &\Rightarrow t = 2 \\ 5 = -1 + 3t &\Rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

Les trois équations donnent $t = 2$, donc $B \in (d)$.

2.3 Droite passant par deux points

Méthode 2. *Pour déterminer la représentation paramétrique de la droite (AB) passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:*

1. *Calculer $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ (vecteur directeur)*
2. *Écrire la représentation paramétrique avec A comme point de référence*

Exemple 8. *Déterminer la représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; -2; 3)$ et $B(4; 1; 0)$.*

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-(-2) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

On peut simplifier : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Représentation paramétrique :

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.4 Positions relatives de deux droites

Propriété 4. *Dans l'espace, deux droites (d_1) et (d_2) peuvent être :*

— ***Confondues*** *: elles ont tous leurs points en commun*

— ***Parallèles strictes*** *: elles n'ont aucun point commun et leurs vecteurs directeurs sont colinéaires*

— ***Sécantes*** *: elles ont un unique point commun*

— ***Non coplanaires*** *: elles ne sont ni parallèles ni sécantes*

Méthode 3 (Étudier la position de deux droites)**.** *Pour étudier la position de (d_1) et (d_2) :*

1. *Vérifier si les vecteurs directeurs sont colinéaires*
2. *Si oui : droites parallèles ou confondues (vérifier si un point de l'une appartient à l'autre)*
3. *Si non : chercher un éventuel point d'intersection en résolvant le système*

3 Plans dans l'espace

3.1 Équation cartésienne d'un plan

Définition 8. *Dans l'espace muni d'un repère, tout plan (P) admet une* ***équation cartésienne*** *de la forme :*

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b, c et d sont des nombres réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Remarque 5. *Un point $M(x_0; y_0; z_0)$ appartient au plan (P) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation : $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$*

Exemple 9. *Le plan (P) d'équation $2x - y + 3z - 6 = 0$*
Le point $A(1; 2; 2)$ appartient-il à (P) ?
$2 \times 1 - 2 + 3 \times 2 - 6 = 2 - 2 + 6 - 6 = 0$ *: Oui, $A \in (P)$*

3.2 Vecteur normal à un plan

Définition 9. *Un* ***vecteur normal*** *à un plan (P) est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à toutes les droites du plan.*

Si (P) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P).

Exemple 10. *Pour le plan $(P) : 2x - y + 3z - 6 = 0$*

Un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.3 Déterminer l'équation d'un plan

Méthode 4 (Plan défini par un point et un vecteur normal)**.** *Pour déterminer l'équation du plan* (P) *passant par* $A(x_A; y_A; z_A)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *:*

1. *Écrire l'équation générale :* $ax + by + cz + d = 0$
2. *Remplacer par les coordonnées de* A *pour trouver* d
3. *Écrire l'équation finale*

Exemple 11. *Déterminer l'équation du plan* (P) *passant par* $A(1; 2; -1)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Équation générale : $3x - y + 2z + d = 0$
Passage par A *:* $3 \times 1 - 2 + 2 \times (-1) + d = 0$
$3 - 2 - 2 + d = 0$*, donc* $d = 1$
Équation du plan : $3x - y + 2z + 1 = 0$

3.4 Plan défini par trois points

Méthode 5. *Pour déterminer l'équation du plan* (ABC) *passant par* A*,* B *et* C *:*

1. *Calculer* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$
2. *Un vecteur normal est* $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ *(produit vectoriel)*
3. *Utiliser la méthode précédente avec le point* A *et le vecteur normal* $\vec{n}$

Remarque 6 (Produit vectoriel)**.** *Pour* $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$*, le produit vectoriel est :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 12. *Déterminer l'équation du plan passant par* $A(1; 0; 1)$*,* $B(2; 1; 0)$ *et* $C(0; 1; 2)$*.*

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 - (-1) \times 1 \\ (-1) \times (-1) - 1 \times 1 \\ 1 \times 1 - 1 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

On peut simplifier : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Équation : $x + z + d = 0$
Passage par $A(1; 0; 1)$ *:* $1 + 1 + d = 0$*, donc* $d = -2$
Équation du plan : $x + z - 2 = 0$

3.5 Plans particuliers

Type de plan	**Équation**	**Vecteur normal**
Plan (Oxy)	$z = 0$	$\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
Plan (Oxz)	$y = 0$	$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
Plan (Oyz)	$x = 0$	$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
Plan parallèle à (Oxy)	$z = k$	$\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
Plan parallèle à (Oxz)	$y = k$	$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
Plan parallèle à (Oyz)	$x = k$	$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

3.6 Plans parallèles et perpendiculaires

Propriété 5 (Plans parallèles). *Deux plans (P_1) et (P_2) sont* ***parallèles*** *si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.*

Si $(P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $(P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, alors :

$$(P_1) \parallel (P_2) \iff \exists k \in \mathbb{R}^* : \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Propriété 6 (Plans perpendiculaires). *Deux plans (P_1) et (P_2) sont* ***perpendiculaires*** *si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.*

Si $\vec{n_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs normaux, alors :

$$(P_1) \perp (P_2) \iff \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \iff a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Exemple 13. *1) Les plans $(P_1) : 2x - y + 3z - 1 = 0$ et $(P_2) : 4x - 2y + 6z + 5 = 0$ sont parallèles car :*

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Les plans $(P_1) : x + 2y - z + 1 = 0$ et $(P_2) : 2x - y + 4z - 3 = 0$ sont perpendiculaires car :

$$1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times 4 = 2 - 2 - 4 = -4 \neq 0$$

Erreur dans mon calcul. Vérifions : $2 - 2 - 4 = -4 \neq 0$, donc ils ne sont pas perpendiculaires.

Pour qu'ils soient perpendiculaires, il faudrait $1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times c = 0$, donc $c = 0$.

3.7 Intersection d'une droite et d'un plan

Méthode 6. *Pour déterminer l'intersection d'une droite (d) et d'un plan (P) :*

1. *Écrire la représentation paramétrique de (d)*
2. *Remplacer x, y, z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de (P)*
3. *Résoudre l'équation en t*
4. *Si solution unique : calculer les coordonnées du point d'intersection*
5. *Si aucune solution : droite parallèle au plan*
6. *Si équation toujours vraie : droite incluse dans le plan*

Exemple 14. *Déterminer l'intersection de la droite $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ et du plan $(P) : x + y + z - 5 = 0$.*

On remplace dans l'équation du plan :

$$(1 + 2t) + (-1 + t) + (3 - t) - 5 = 0$$

$$1 + 2t - 1 + t + 3 - t - 5 = 0$$

$$2t - 2 = 0$$

$$t = 1$$

Point d'intersection :

$$x = 1 + 2 \times 1 = 3$$
$$y = -1 + 1 = 0$$
$$z = 3 - 1 = 2$$

Le point d'intersection est $I(3; 0; 2)$.

4 Applications

Application 1. ***Exercice 1 :*** *Déterminer l'équation de la droite passant par* $A(2; 5)$ *et de coefficient directeur* $m = -3$.

Solution :
$y = -3x + p$
Passage par A *:* $5 = -3 \times 2 + p$, *donc* $p = 11$
Équation : $y = -3x + 11$ *ou* $3x + y - 11 = 0$

Application 2. ***Exercice 2 :*** *Les droites* $(d_1) : y = 2x + 1$ *et* $(d_2) : y = -\frac{1}{2}x + 3$ *sont-elles perpendiculaires ?*

Solution :
$m_1 \times m_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$
Oui, les droites sont perpendiculaires.

Application 3. ***Exercice 3 :*** *Déterminer l'intersection de la droite* $(d) : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ *et du plan* $(P) : x - y + z = 1$.

Solution :
$t - 2t + (1 + t) = 1$
$t - 2t + 1 + t = 1$
$0 = 0$
L'équation est toujours vraie : la droite est incluse dans le plan.

5 Tableaux récapitulatifs

5.1 Droites dans le plan

Équation cartésienne	$ax + by + c = 0$
Équation réduite	$y = mx + p$
Vecteur directeur	$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$
Vecteur normal	$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Parallèles	$m_1 = m_2$
Perpendiculaires	$m_1 \times m_2 = -1$

5.2 Droites et plans dans l'espace

	Droite	**Plan**
Équation	Paramétrique	Cartésienne $ax + by + cz + d = 0$
Vecteur directeur	$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	—
Vecteur normal	—	$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$